العنوان:	خوارزميات تحديد البيانات المسطحة
المؤلف الرئيسي:	بلال، غيث
مؤلفين آخرين:	صبح، محمد، جبران، جبران(مشرف)
التاريخ الميلادي:	2000
موقع:	دمشق
الصفحات:	1 - 109
رقم MD:	574293
نوع المحتوى:	رسائل جامعية
اللغة:	Arabic
الدرجة العلمية:	رسالة ماجستير
الجامعة:	جامعة دمشق
الكلية:	كلية العلوم
الدولة:	سوريا
قواعد المعلومات:	Dissertations
مواضيع:	المعلوماتية، الرياضيات
رابط:	http://search.mandumah.com/Record/574293

الجمهورية العربية السورية

جامعة دمشق

كلية العلوم_قسم الرياضيات

شعبة المعلوماتية

خوارزميات تحديد البيانات المسطحة

Algorithms for Determination the Planar Graphs

أطروحة مقدمة لنيل

شهادة الماجستير في المعلوماتية (الانفورماتيك)

إعداد الطالب

غيث بلال

بإشراف

الأستاذ الدكتور

محمد صبح

الدكتور

جبران جبران

المحتويات

CONTENTS

الفصل الثالث: ثخانة البيانات

الفصل الرابع: برمجة الخوارزميات

مقدمة
INTRODUCTION

لقد أدى التطور الكبير لعلم الحاسب إلى تطور العديد من العلوم الأخرى المرتبطة به، ومن بينها علم البيان. حيث تعتبر نظرية البيان من العلوم الحديثة التي حدث فيها تطورات رئيسية وبدرجات كبيرة في الفترة الماضية نظراً للحاجة البشرية لهذا العلم.

بدأت دراسة نظرية البيان في القرن الثامن عشر عندما قام الرياضي السويدي المشهور Euler في عام 1736 بحل مسألة الجسور السبعة لمدينة Konigsberg. وبعد قرنين أي في عام 1936 كتب العالم Denes Konig أول كتاب حول نظرية البيان.

وتهتم نظرية البيان Graph Theory بالدراسات الرياضية والخوارزمية لبنية البيانات. حيث يعد البيان من وجهة نظر أولية مجموعة منتهية من النقاط تتصل مع بعضها بخطوط وفق علاقة معرفة عليها وتدعى نقاط البيان رؤوسا Vertics، أما الخطوط الواصلة بينها فتدعى أضلاعا Edges. ولعلم البيان دور هام في معظم العلوم فمن منا ينكر دوره في علوم الهندسات (تنظيم شبكات الطرق، شبكات الهاتف، تمديدات الكهرباء........) ومن منا لا يعرف دوره في العلوم الإلكترونية (تصميم اللوحات الإلكترونية).

وتشكل أبحاث البيانات المسطحة قسما هاما من دراسات نظرية البيان التي احتلت مكانة عالية بين فروع الرياضيات التطبيقية والتي لها تطبيقات عملية في شتى مجالات العلوم التقنية الحديثة. ونعني بالبيانات المسطحة Planar Graphs ذلك العلم الذي يقوم بدراسة البيان بمختلف أشكاله ويحدد تسطح هذا البيان أو عدم تسطحه وفق معايير مدروسة.فمن المفيد عند التخطيط لمشاريع معقدة معرفة مدى إمكانية تنفيذها على سطح مستو حيث تكون بحاجة لمثل ذلك على سبيل المثال لا الحصر عند تصميم الدارات الإلكترونية على لوحة مستوية أو تصميم شبكات الخدمات العامة في المدن حيث يهمنا ألا تتقاطع خطوط هذه الدارات أو الشبكات إلا في عقد خاصة تدعى عقد الوصل أو الاتصال.

يهدف بحثنا هذا إلى دراسة خوارزميات تحديد البيانات المسطحة حيث قمنا بتحسين خوارزمية لاختبار التسطح عن طريق إضافة أفكار جديدة إليها وبرمجتها، وكذلك ابتكار خوارزمية جديدة لنفس الغاية وبرمجتها. والأهم من ذلك هو تطبيق الخوارزمية الجديدة لإيجاد ثخانة البيانات التامة والبيانات الثنائية التامة. وننوه أن دراستنا تقتصر على البيانات التي تحوي عددا منتهيا من الرؤوس والبيانات البسيطة غير الموجهة.

وتقسم هذه الأطروحة إلى مقدمة وأربعة فصول.

الفصل الأول: مبادئ نظرية البيان ومدخل إلى الخوارزميات وهو يحتوي على بعض التعاريف والمفاهيم الأساسية إضافة إلى بعض المبرهنات كذلك يدرس كلفة الخوارزميات والتي تعتبر أساسية في دراستنا.

الفصل الثاني: البيانات المسطحة وتعني البيانات التي يمكن رسمها في المستوي دون أن تتقاطع أضلاعها في أي نقطة عدا الرؤوس. وهذه البيانات مهمة جدا نظرا لما لها من تطبيقات عملية فمثلا لنفرض لدينا لوحة مستوية ونريد أن نطبق عليها دارة محددة لها مجموعة من العقد والتي نمثلها برؤوس البيان ومجموعة من

خطوط التوصيل التي تمثلها بأضلاع البيان. إذاً كما نلاحظ تحولت المسألة المدروسة إلى بيان يتألف من رؤوسٍ وأضلاعٍ وأصبح السؤال المطروح هنا:

هل يمكن الوصل بين الرؤوس دون أن تتقاطع الخطوط؟ وبمعنى رياضي هل البيان الناتج مسطحاً أم لا؟

كما احتوى الفصل الثاني على الخوارزمية المحسنة والخوارزمية التي أوجدناها لتحديد فيما إذا كان بيان معطى مسطحاً أم لا.

الفصل الثالث: ثخانة البيانات ويدرس الخيارات التي يمكن الاستفادة منها لتجنب تقاطع الأضلاع عندما لانستطيع التمثيل بواسطة بيان مسطح. وقد قمنا في هذا الفصل بتحسين الخوارزمية الجديدة وتطبيقها على البيانات التامة والثنائية التامة لإيجاد ثخانتها وقارنا النتائج التي حصلنا عليها مع النتائج المأخوذة من مقالة علمية بعنوان The Thickness of Graphs صدرت مؤخراً في مجلة Springer.

الفصل الرابع: برمجة الخوارزميات حيث قمنا بتحويل الخوارزميات السابقة إلى برامج بلغة الباسكال.

أما النتائج الأساسية لهذا البحث فهي:

1 ــ تحسين خوارزمية لاختبار التسطح.

2 ــ إيجاد خوارزمية جديدة لاختبار التسطح مع دراسة كلفتها.

3 ــ تعديل الخوارزمية الجديدة وتطبيقها على البيانات التامة والثنائية التامة لإيجاد ثخانتها.

4 ــ برمجة الخوارزميات السابقة بلغة برمجية هي الباسكال.

الفصل الأول

مبادئ نظرية البيان ومدخل إلى الخوارزميات

Basic Graph Theory and an Introduction to Algorithms

الفصل الأول

مبادئ نظرية البيان ومدخل إلى الخوارزميات

Basic Graph Theory and an Introduction to Algorithms

تمهيد:

تعتبر نظرية البيان من العلوم الحديثة التي تطورت في السنوات الأخيرة الماضية حيث كان ذلك مرتبطاً بتطور الحاسب. ويعد العالم الرياضي اولر (1707-1782) مؤسس نظرية البيان حيث قام بحل أول مسألة بواسطتها عام 1736 وهي مسألة الجسور السبعة لمدينة Konigsberg. وبشكل عام إن لعلم البيان دوراً أساسياً وهاماً في معظم العلوم، فنحن نعلم دوره في علوم الهندسة وكذلك دوره الأهم في الإلكترونيات. حيث تهتم نظرية البيان بالدراسات الرياضية والخوارزمية لبنية البيانات.

1.1 مبادئ نظرية البيان

لابد لنا في البداية من أن نطرح السؤال التالي:

ماذا يعني البيان؟ وما هي التطبيقات العملية لدراسته؟

سنجيب الآن عن الشطر الأول من السؤال بينما نترك الإجابة عن الشطر الثاني منه لفصول هذه الأطروحة.

ولنبدأ بمثال أولي:

أنهى الطلاب الأربعة A,B,C,D عامهم الدراسي وهم بحاجة إلى عمل خلال العطلة الصيفية.علموا أن هناك أربعة أماكن شاغرة في المدينة.

ـــ العمل في استراحة الجامعة (r).

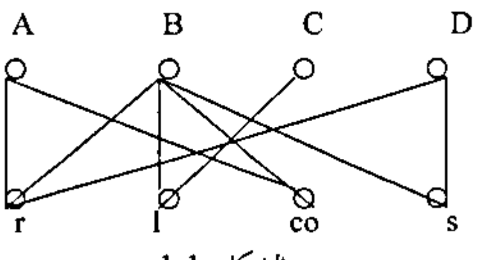
ـــ العمل في مكتبة (l).

ـــ العمل محاسباً في إحدى الشركات (co).

ـــ العمل كمندوب مبيعات (s).

يرغب الطالب A بالعمل في استراحة الجامعة أو كمحاسب، والطالب B يرغب العمل في إحدى المجالات السابقة، وC يرغب العمل في المكتبة، أما الطالب D فيرغب العمل في استراحة الجامعة أو كمندوب مبيعات.

نستطيع أن نعبر عن ذلك بالشكل التالي الذي يعطينا فكرة مبدئية عن البيان:



الشكل (1.1)

✧ تعريف [1][2]

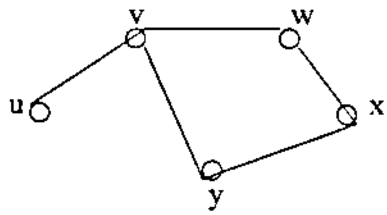
البيان G: هو ثنائية من المجموعات V, E حيث تكون V مجموعة منتهية وغير خالية من العناصر والتي تدعى مجموعة رؤوس البيان Vertex set (أو عقد nodes أو نقاط points)ونرمز لها بـــ V(G)، أما E فهي مجموعة منتهية (قد

تكون خالية) عناصرها ثنائيات من المجموعة V والتي تدعى مجموعة أضلاع البيان Edge set (أو خطـــوط lines)
ونرمز لها بـــ E(G). ونرمز للبيان G بـــ G(V,E).

ملاحظة: لكل بيان رسم تخطيطي مقترن به يساعد في فهم المسألة التي يمثلها.

مثال:

ليكن لدينا الرسم التخطيطي التالي:



الشكل(2.1)

يمثل الشكل(2.1) بيان فيه:

$$V(G)=\{ u, v, w, x, y \}$$
$$E(G)=\{ uv, vw, wx, xy, yv \}$$

وبشكل عام يمكن كتابة الضلع{u, v} في البيان G بالشكل{v, u}، لكن من الأفضل أن يُكتب uv أو vu.

تقسم البيانات إلى قسمين:

البيانات الموجهة: وهي البيانات التي يكون لكل ضلع من أضلاعها اتجاه ما.

البيانات غير الموجهة: وهي البيانات التي ليس لأضلاعها اتجاهات.

✧ تعاريف

ــ العروة: هي كل ضلع يصل رأساً بنفسه.

ــ الرأسان المتجاوران adjacent vertices:هما رأسان يصل بينهما ضلع ما. أما الضلعان المتحاوران فـــهما ضلعـــان يشتركان برأسٍ واحدٍ.

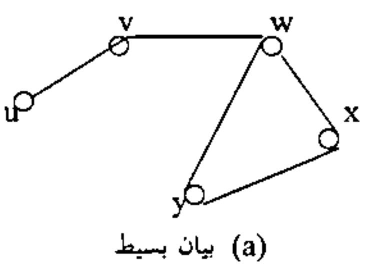
نلاحظ في البيان a من الشكل(3.1) أن الرأسين v و u متجاوران أما u و w فهما غير متجاورين. وأيضا فيه الضلعان uv و vw متجاوران.

ــ الأضلاع المتوازية parallel edges: هي الأضلاع التي تصل بين نفس الرأسين.

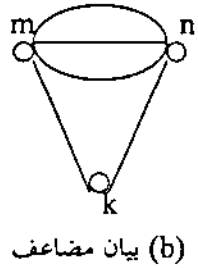
ــ البيان البسيط: هو بيان لا يحوي عُرى ولا أضلاعاً متوازيةً.

هناك حالات يمكن تمثيلها بشكل أفضل بواسطة البيان المضاعف كما هو الحال في شبكة الطرق التي تخدم مدينتين.

ــ البيان المضاعف multigraph: هو بيانٌ يحوي أضلاعاً متوازيةً. إن البيان b من الشكل(3.1) هو بيان مضاعف فيه الأضلاع الواصلة بين الرأسين n،m أضلاعٌ متوازيةٌ.



(a) بيان بسيط



(b) بيان مضاعف

الشكل(3.1)

ننوه بأن جميع التعاريف والمفاهيم الواردة في هذه الأطروحة تنطوي تحت مفهوم البيان البسيط وغير الموجه.

ـــ مرتبة بيان order: هي عدد رؤوس البيان ونرمز لها بـــ| $V(G)$ | .

ـــ قياس بيان size: هو عدد أضلاع البيان ونرمز له بـــ | $E(G)$ |.

وفي الحالة العامة نستخدم من أجل البيان $G(V,E)$ الرمز p أو$p(G)$ ليدل على مرتبته والرمز q أو$q(G)$ ليدل على قياسه، وبالتالي نرمز للبيان بالشكل $G(p, q)$. ونلاحظ أن البيان a من الشكل(3.1) من المرتبة 5 والقياس 5.

نتيجة 1.1 [1]

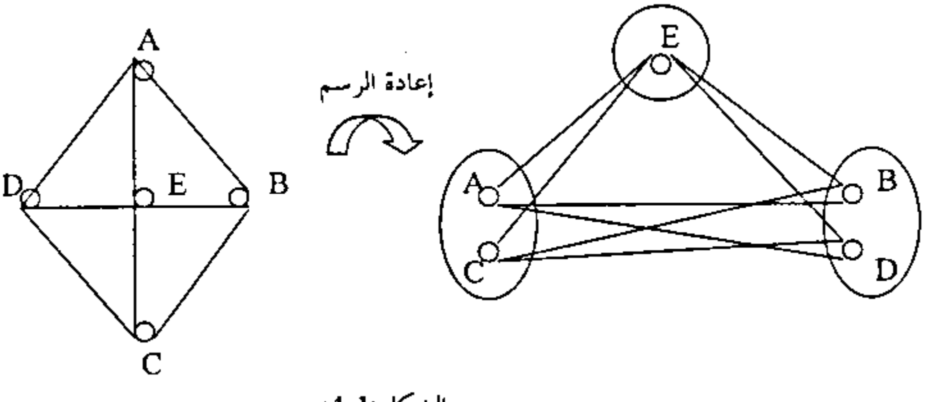
إذا كان $G(p,q)$ بياناً عندئذٍ يكون $q \le \binom{p}{2}$ حيث أن هناك $\binom{p}{2}$ مجموعة جزئية ذات عنصرين من V.

لنناقش بعض الحالات الأخرى التي يمكن وصفها باستخدام البيان من خلال المثال التالي:

لدينا في حديقة الحيوان خمسة أماكن لسكن الحيوانات A , B, C, D, E وسوف نسكن الحيوانات في حظيرة واحدة إذا كانت متعايشة مع بعضها البعض فقط. بحيث أن الحيوانات الموجودة في A و C لا يمكن أن تعيش في الأماكن B أو D وأن الحيوانات الموجودة في E لا تستطيع العيش في أي من الأماكن الأربعة الأخرى وبالتالي السؤال المطروح:

ما هو عدد الحظائر الأصغر اللازمة لسكن الحيوانات ؟. نستطيع الإجابة عن هذا السؤال بالاعتماد على البيان كالتالي:

نعتبر رؤوس البيان هي أماكن سكن الحيوانات ونصل كل رأسين بضلع إذا لم يكن باستطاعة الحيوانات التعايش فيها معاً. ويمكن تمثيل هذه المسألة بالبيان التالي:



الشكل(4.1)

إذاً وكما نلاحظ فإن عدد الأماكن الأصغر هو ثلاثة فقط.

✧ تعاريف تتعلق بدرجة رأس

ـــ جوار neighborhood رأس v من بيان $G(V,E)$: هو مجموعة الرؤوس التي تتصل بذلك الرأس، ويمكن أن نعبر عن ذلك كما يلي:

$$N(v)=\{u\in V \mid vu\in E\}$$

ونرمز له بـــ $N(v)$ أو $N_G(v)$.

ـــ درجة degree رأس v: هي عدد الرؤوس المجاورة له. و نرمز لها بالرمز degv أو $\deg_G v$ أي أن $\deg v= |N(v)|$.

إن البيان b من الشكل (5.1) من المرتبة 4 والقياس 5.كما فيه v ترتبط بـــu وw،ولكنها لا ترتبط بـــ x.وهذا يعني أن $N(v) = \{u,w\}$، وبالتالي $\deg v = 2$.

نتيجة 2.1

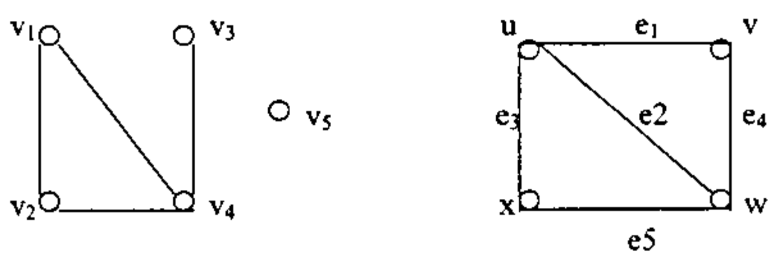
إذا كان G من المرتبة p وكان v رأساً من البيان G فإن $0 \leq \deg v \leq p-1$.

ــ الرأس المعزول isolated vertex: هو رأسٌ درجته تساوي الصفر.

ــ الرأس الطرفي end-vertex: هو رأسٌ من الدرجة 1.

ويكون الرأس فردياً أو زوجياً تبعاً لكون درجته فردية أو زوجية. نلاحظ في البيان a من الشكل (5.1) أن الرؤوس v_1,v_2,v_5 زوجية، بينما الرؤوس v_3,v_4 هي فردية، والرأس v_5 معزول أما v_3 فهو رأس طرفي.

كما نلاحظ أنه من المرتبة 5 والقياس 4. وفيه $\sum_{i=1}^{p} \deg v_i = 8$ أي أن مجموع درجات جميع الرؤوس هو 8 والــذي يساوي ضعف القياس. هذه النتيجة صحيحة دوماً وتدعى المبرهنة الأولى في نظرية البيان.



(a) (b)

الشكل(5.1)

مبرهنة 1.1 [1][2]

ليكن G(V,E) بياناً من المرتبة p والقياس q، حيث $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ عندئذٍ:

$$\sum_{i=1}^{p} \deg v_i = 2q$$

الإثبات:

عندما تُجمع درجات جميع رؤوس البيان G فإن كل ضلع يتم عده مرتين، مرة لكل رأس من طرفيه. □

ولهذه النظرية نتيجة مفيدة.

نتيجة 3.1 [1][2]

كل بيان يحوي عدداً زوجياً من الرؤوس الفردية.

الإثبات:

بفرض V_e مجموعة الرؤوس الزوجية و V_o مجموعة الرؤوس الفردية في البيان G ذي القياس q عندئذٍ:

$$\sum_{v \in V(G)} \deg v = \sum_{v \in V_e} \deg v + \sum_{v \in V_o} \deg v = 2q$$

وبالتالي:

$$\sum_{v \in V_o} \deg v = 2q - \sum_{v \in V_e} \deg v$$

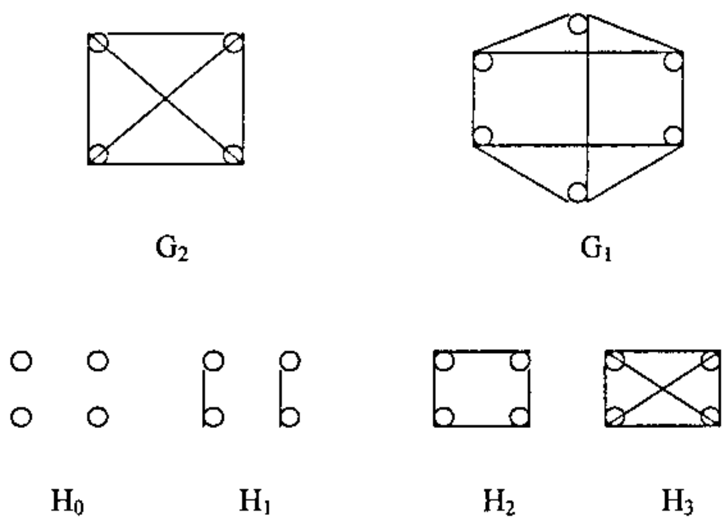
بما أن كل حد من الجزء الأيمن من المعادلة عدد زوجي، فإن المجموع في الطرف الأيسر يجب أن يحوي عدداً زوجياً من الحدود، أي أن $|V_0|$ عدد زوجي. □

1.1.1 البيان المنتظم regular graph

✧ تعريف

البيان المنتظم من الدرجة r (r-regular): هو بيانٌ درجة كل رأس فيه تساوي r.

يحوي الشكل(6.1) بيانين منتظمين من الدرجة 3 هما G_1 و G_2، كذلك فيه بيانات بسيطة من المرتبة 4 ومنتظمة من الدرجات 0, 1, 2, 3.



الشكل(6.1)

البيانات المنتظمة

إذا كان البيان G منتظماً من الدرجة r ومرتبة p عندئذٍ تكون درجته $0 \leq r \leq p-1$. لكن إذا كانت $0 \leq r \leq p-1$ عندئذٍ ليس من الضروري أن يكون هناك بيانات بسيطة من المرتبة p ومنتظمة من الدرجة r. مثلاً لا يوجد بيان منتظم من الدرجة الأولى أو الثالثة ومرتبته 5، وذلك لأن البيان لا يمكن أن يحتوي عدداً فردياً من الرؤوس الفردية نتيجة(3.1).

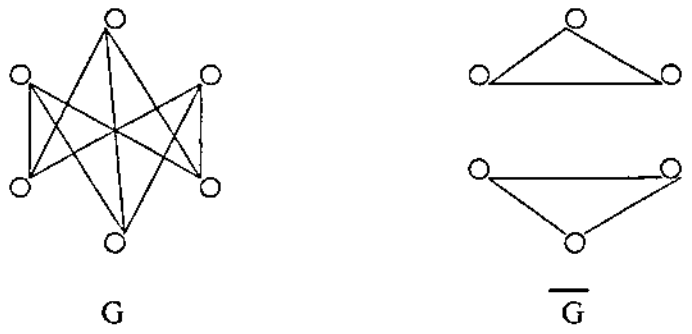
على أي حال إذا لم يكن r و p فرديين معاً وكان $0 \leq r \leq p-1$ عندئذٍ يوجد دائماً بيان منتظم من المرتبة p والدرجة r.

2.1.1 البيان المتمم complement graph

✧ تعريف

متمم بيان G: هو بيان له نفس مجموعة رؤوس البيان G، ويكون ضلعٌ ما منه إذا وفقط إذا لم يكن ضلعاً في البيان G، ونرمز لمتمم بيان بالرمز $\overline{G}$.

ــ إذا كان v رأساً من الدرجة n في بيان G ذي مرتبة p عندئذٍ تكون درجة v في $\overline{G}$ هي p-n-1 لذلك فإن $\overline{G}$ يكون منتظماً إذا وفقط إذا كان G منتظماً. ويبين الشكل(7.1) البيان G ومتممه $\overline{G}$.



الشكل(7.1)

البيان G ومتممه.

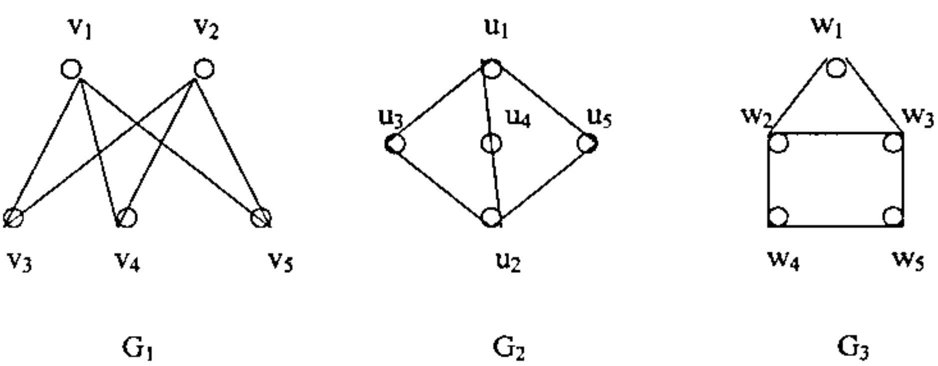
3.1.1 البيانات المتشاكلة isomorphic graphs [1][2]

يمكن لشكلين تخطيطيين يمثلان البيان نفسه أن يبدوا مختلفين تماماً كما هو الحال في الشكل(4.1). ومن المهم أن نعرف فيما إذا كان البيانان G_1 وG_2 هما في الحقيقة البيان نفسه، ومن البديهي أن يمثلا البيان نفسه إذا استطعنا الحصول على أحدهما من الآخر عن طريق إعادة رسمه.

✧ تعريف

البيانات المتشاكلان: يكون البيانان $G_1(V_1,E_1)$ و $G_2(V_2,E_2)$ متشاكلين إذا كان هناك دالة تقابل $\phi:V_1\rightarrow V_2$ حيث أن $uv \in E_1 \Leftrightarrow \phi(u)\phi(v) \in E_2$ (سنرمز اختصاراً بـ ϕu بدلاً عن $(\phi(u)$). تدعو الدالة ϕ تشاكل. ونرمز للبيانين المتشاكلين G_1 و G_2 بـ $G_1 \cong G_2$.

إن البيانين G_1 و G_2 المبينين في الشكل (8.1) متشاكلان وذلك لأنه يمكن إعادة رسم G_2 للحصول على G_1. بينما البيانان G_2 و G_3 في الشكل نفسه غير متشاكلين وذلك لأنه لا يوجد تقابل من $V(G_2)$ إلى $V(G_3)$.

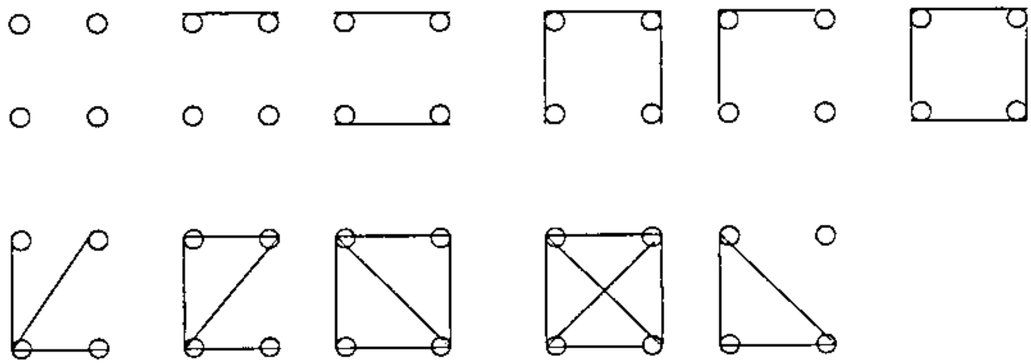


الشكل(8.1)

البيانات المتشاكلة وغير المتشاكلة.

ملاحظة: إذا كان $G_1(V_1,E_1)$ و $G_2(V_2,E_2)$ بيانين متشاكلين عندئذٍ يجب أن يكون لهما نفس الرتبة والقياس.

بما أننا نعتبر بيانين متماثلين إذا وفقط إذا كانا متشاكلين، فإنه يوجد بيان واحد من المرتبة الأولى فقط ندعوه بياناً تافهاً. ويكون البيان غير التافه من المرتبة 2 على الأقل. كما يوجد بيانان غير متشاكلين من المرتبة 2 وأربعة بيانات من المرتبة 3. في الشكل(9.1) هناك أحد عشر بياناً من المرتبة 4.



الشكل (9.1)

بيانات من المرتبة 4.

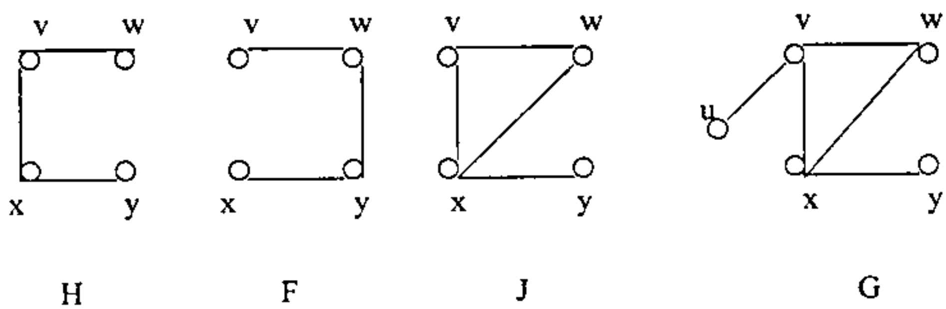
4.1.1 البيانات الجزئية subgraphs

يكون البيان $H(V_H,E_H)$ بياناً جزئياً من البيان $G(V,E)$ إذا تحقق الشرطان التاليان:

1- $V(H) \subseteq V(G)$.

2- $E(H) \subseteq E(G)$.

إن البيان H في الشكل(10.1) هو بيان جزئي من G، بينما البيان F ليس جزئياً من G لأن الضلع $wy \in E(F)$ ولكن $wy \notin E(G)$.



الشكل(10.1)

البيانات الجزئية وغير الجزئية.

ـــ نصادف بكثرة بعض الأنواع من البيانات الجزئية لذلك نعطيها أسماء خاصة ومن هذه البيانات:

✧ تعريف

بفرض S مجموعة غير خالية من رؤوس البيان G. البيان الجزئي المنتج (المولد) بـــ S induced هو أكبر بيان جزئـــي من G مجموعة رؤوسه S، ويرمز له بالرمز $< S >$، بمعنى أن $< S >$ يحوي بالضبط تلك الأضلاع من G التي تصـــل بين رأسين من S.

يكون H البيان الجزئي من G بياناً منتجاً بالرؤوس vertex-induced إذا كان $H = < S >$ من أجل مجموعة جزئيـة غير خالية S من رؤوس G.

لاحظنا أن البيان H في الشكل(10.1) هو بيان جزئي من G. ولكن H ليس بياناً جزئياً منتجـــاً لأن $x,w\in V(H)$ و $xw\in E(G)$ ولكن $xw\notin E(H)$. من ناحية أخرى إن البيان J في الشكل(10.1) هو بيان جزئي منتج من G حيث:

$.J = <\{v, w, x, y\}>$

✧ تعريف

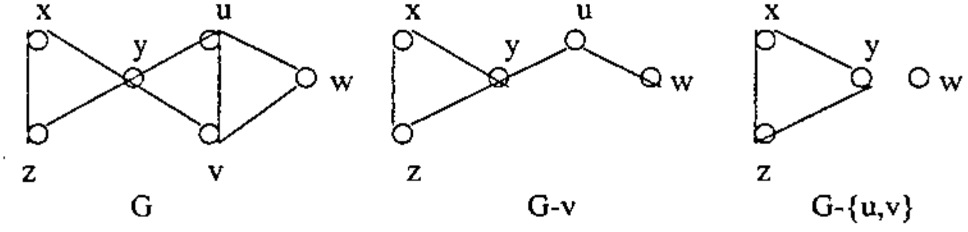
إن محذوف deletion مجموعة جزئية S من مجموعة رؤوس G: هو البيان الجزئي الذي يحوي رؤوساً من G وليســـت من S والأضلاع من G لاتصل بين رؤوس من S. يرمز لهذا البيان الجزئي بـــ G-S.

نلاحظ أن $G\text{-}S= < V(G)\text{-}S >$. وإذا كانت S مؤلفة من رأس وحيد عندئذٍ نكتب G-v بدلاً عن $G\text{-}\{v\}$.

يبين الشكل(11.1) البيان G والبيانين G-v و $G\text{-}\{u,v\}$.

ـــ إذا كان $H\ (V_H,E_H)$ بياناً جزئياً منتجاً من $G(V,E)$ وكان $S=V_G\text{-}V_H$ عندئذٍ يكون: $H= G\text{-}S$.

وبالتالي فإن كل بيان جزئي منتج من بيان G ينتج من حذف مجموعة جزئية (قد تكون خالية) من رؤوس G.



الشكل(11.1)

محذوف رؤوس من البيان

سنقدم الآن مفهوماً مشابهاً للمفهوم السابق وهو البيانات المنتجة (المولدة) بالأضلاع.

✧ تعريف

لتكن X مجموعة غير خالية من أضلاع البيان G، البيان المنتج بـــ X: هو أصغر بيان جزئي من G مجموعة أضلاعـه X ويرمز له بـــ $< X >$ بمعنى أن $< X >$ يحتوي رؤوساً من G المقترنة بضلع واحد من X على الأقل.

يكون البيان الجزئي H من البيان G بياناً جزئياً منتجاً بالأضلاع إذا كان $H=< X >$ من أجل مجموعة ما غير خالية X من أضلاع G.

في الشكل (12.1) البيان H_1 ليس بياناً جزئياً منتجاً بالأضلاع من G_1 لأن u لاتقترن بأي ضلع من H_1 بينما كـــلا البيانين F_1 , J_1 بيانٌ منتجٌ بالأضلاع من G_1 حيث :

$$J_1= <\{vx, xy, yw\}>$$
$$F_1= <\{uv, uw, wy, yx, xv\}>$$

✧ تعريف

البيان الهيكلي spanning: هو بيان جزئي $H(V_H,E_H)$ من البيان $G(V,E)$ بحيث أن $V_H=V_G$.

إن البيانين H_1وF_1 في الشكل (12.1) بيانان جزئيان هيكليان لـG_1، لكن J_1 ليس بياناً هيكلياً لـ G_1 لأن $u\in V(G_1)-V(J_1)$.

ـــ إذا كانت X مجموعة من أضلاع البيان G عندئذٍ G-X هو البيان الجزئي الهيكلي لـ G الناتج من حذف أضلاع E(G) التي تنتمي إلى X. في الحقيقة يكون H بياناً جزئياً هيكلياً من البيان G إذا وفقط إذا كان H=G-X حيث أن $X=E_G-E_H$. وإذا كان e ضلعاً من بيان G عندئذٍ نكتب G-e بدلاً من G-{e}.

لدينا في الشكل (12.1) البيانات G_1,F_1,H_1 فيها:

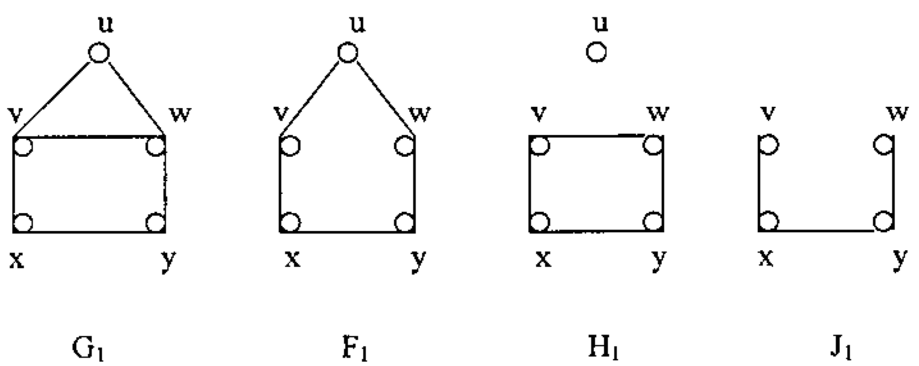
$$F_1=G_1\text{-}vw$$

و $H_1=G_1-\{uv, uw\}$.

✧ تعريف

بفرض أن G بيان فيه $u_i,\ v_i$ ($i=1,2,\ldots,n$) أزواج غير متصلة من رؤوسه عندئذٍ نعرف البيان $G+\{u_1v_1,u_2v_2,\ldots\ldots,u_nv_n\}$: بأنه البيان الذي نحصل عليه من G بإضافة أضلاع المجموعة $\{u_1v_1,u_2v_2,\ldots,u_nv_n\}$. وإذا كان u و v رأسين غير متصلين من G عندئذٍ نكتب G+uv بدلاً عن G+{uv}.

مثلاً في الشكل (12.1) $G_1=F_1+vw$ و $G_1=H_1+\{uv, uw\}$.



الشكل(12.1)

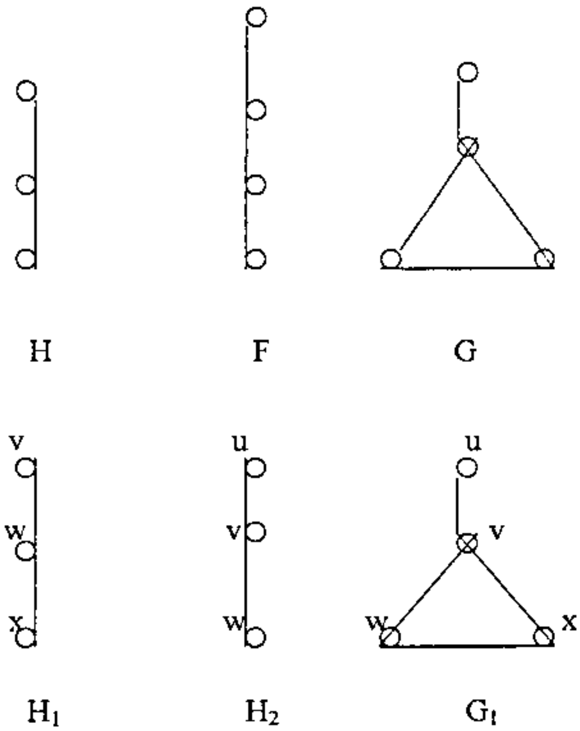
بيانات جزئية منتجة بالأضلاع وبيانات جزئية هيكلية.

ملاحظة: في كل الحالات التي تكون فيها البيانات المدروسة معرفة بواسطة مجموعات الرؤوس والأضلاع فإنها تنطوي تحت مفهوم بيان جزئي من بيان. ولكن بما أن البيانات يمكن أن تُمثل بمخططات فإننا نحتاج في تلك الحالة تعريفاً مختلفاً. مثلاً هل البيان H المبين في الشكل(13.1) هو بيان جزئي من G؟.

من أجل البيانين H و G المعرفين بهذه المخططات سوف ندعو H بياناً جزئياً من G إذا أمكن تسمية رؤوس H و G بحيث يكون H بياناً جزئياً من Gوفق المفهوم الموصوف سابقاً. وهذا ينطبق على البيانات الجزئية المنتجة أيضاً.

في الشكل(13.1) نلاحظ أن H بيان جزئي من G حيث أمكننا تسمية رؤوس H و G لنحصل على H_1 وG_1 على الترتيب. في الواقع أن H بيان جزئي منتج من G، إن تسمية رؤوس H_1 لا تبين هذه الحقيقة، لكن تسمية H_2 تبينها.

كذلك البيان F هو بيان جزئي من G أيضاً، لكنه ليس بياناً جزئياً منتجاً من G.



الشكل(13.1)

بيانات جزئية وبيانات جزئية متجة.

2.1 متتالية الدرجات degree sequences [1]

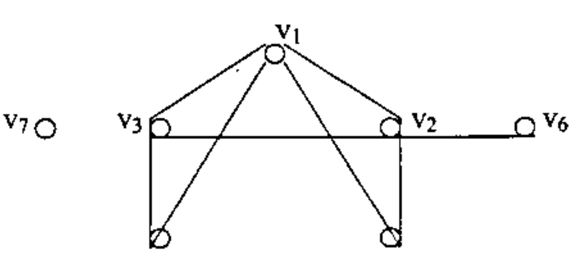
نرفق بكل بيان G بمجموعة رؤوسه $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_p\}$ متتالية أعداد طبيعية ندعوها متتالية الدرجات:

$$\deg v_1, \deg v_2, \ldots\ldots, \deg v_p$$

سنفرض أن الرؤوس قد سميت بحيث يتحقق: $\deg v_1 \geq \deg v_2 \geq \ldots\ldots \geq \deg v_p$.

يدعى أصغر حد $\deg v_p$ من متتالية الدرجات الدرجة الصغرى في G ويرمز لها بالرمز $\delta(G)$ بينما يدعى أكبر حد $\deg v_1$ الدرجة العظمى ويرمز لها $\Delta(G)$.

إن للبيان G في الشكل (14.1) متتالية درجات 4, 4, 3, 2, 2, 1, 0 فيها: $\Delta(G) = 4$ و $\delta(G) = 0$.



الشكل(14.1)

البيان G ومتتالية درجاته.

إذا كانت $d_1,d_2,\ldots,d_p$ متتالية درجات بيان ما، عندئذ يكون $\sum_{i=1}^{p} d_i$ عددا زوجيا حتما و $0 \le d_i \le p-1$ من أجل $1 \le i \le p$. ولكن من أجل المتتالية $S: d_1, d_2,\ldots,d_p$ التي تحقق أن $\sum_{i=1}^{p} d_i$ عدد زوجي و $0 \le d_i \le p-1$ من أجل $1 \le i \le p$ فليس هناك ضمان بأن S هي متتالية درجات لبيان ما.

مثلا لدينا $S{:}5, 5, 3, 2, 1, 0$ متتالية من ستة أعداد طبيعية مجموعها زوجي وكل حد فيها أصغر أو يساوي خمسة ولكن S ليست متتالية درجات لأي بيان، ولتبيان ذلك نلاحظ أنه إذا كانت S متتالية درجات لبيان G عندئذ يكون G من المرتبة 6 ويحتوي رأسا من الدرجة 5 رأسا درجته 0 لكن الرأس من الدرجة 5 يرتبط بكل رأس من G بما فيها الرأس من الدرجة 0 وهذا مستحيل. على كل حال هناك نتيجة مفيدة تسمح لنا بتحديد فيما إذا كانت متتالية أعداد طبيعية هي متتالية درجات لبيان ما أم لا.ندعو متتالية أعداد طبيعية أنها بيانية graphical إذا كانت متتالية درجات لبيان ما.

☜ مبرهنة 2.1 [1]

تكون متتالية الأعداد الطبيعية $S : d_1, d_2, \ldots\ldots,d_p$ والتي فيها $d_1 \ge d_2 \ge \ldots\ldots \ge d_p$ حيث $p \ge 2$ و $d_1 \ge 1$ بيانية إذا وفقط إذا كانت المتتالية: $S_1 : d_2-1,d_3-1,\ldots\ldots,d_{d_1+1}-1,d_{d_1+2},\ldots,d_p$ بيانية.

قبل أن نعرض الإثبات لنحدد ماذا تعني المبرهنة.

نتحت المتتالية S_1 بحذف الحد الأول d_1 ومن ثم طرح واحد من الحدود التي تليه في المتتالية S. ولتحديد فيما إذا كانت S بيانية، يكفي أن نحدد فيما إذا كانت S_1 بيانية فقط. وهذا الاختبار سيكون أسهل لأن S_1 أقل بحد واحد من S كما أن حدودها أصغر قليلا.

الإثبات:

لنفرض أولا أن S_1 بيانية.هذا يعني أن هناك بيانا G_1 من المرتبة P-1 تكون متتالية درجاتهS_1.

يمكن تسمية رؤوس البيان G_1 بالشكل $v_2, v_3,\ldots\ldots,v_p$ بحيث:

$$\deg v_1 = \begin{cases} d_i - 1 & 2 \le i \le d_1 + 1 \\ d_i & d_1 + 2 \le i \le p \end{cases}$$

يمكن إنشاء بيان جديد G بإضافة رأس جديد v_1 إلى G_1 ووصله بالرؤوس v_i حيث $2 \le i \le d_1+1$ والتي عددها d_1، عندها تكون $\deg v_i = d_i$ من أجل كل رأس v_i من G وبالتالي S بيانية.

سنبرهن الآن العكس لنفرض أن S بيانية، عندئذ هناك بيان أو أكثر من المرتبة p متتالية درجاته S، ليكن البيان $G(V,E)$ أحدها بحيث أن: $V =\{ v_1, v_2,\ldots,v_p\}$ حيث $\deg v_i = d_i$ من أجل $1 \le i \le p$، ومجموع درجات الرؤوس المتصلة بـ v_1 أعظمي. ولنفرض أنه في البيان G يجب أن يتصل v_1 بالرؤوس ذات الدرجات $d_2, d_3,\ldots, d_{d_1+1}$ التي عددها d_1 ولنتحقق من ذلك بفرض جدلي.

لنفرض جدلا أن v_1 لا يرتبط بالرؤوس ذات الدرجات $d_2, d_3,\ldots\ldots, d_{d_1+1}$ عندها يجب أن يوجد رأسان v_j و v_k علما بأن $d_j > d_k$ بحيث أن v_1 يتصل بـ v_k ولا يتصل بـ v_j وبما أن $\deg v_j > \deg v_k$ فإن هناك رأسا ما v_n يجب أن يتصل بـ v_j ولا يتصل بـ v_k. وبحذف الضلعين v_1v_k و v_jv_n وإضافة الضلعين v_1v_j و v_kv_n نحصل على بيان `G له أيضا متتالية الدرجات S. لكن فيه مجموع درجات الرؤوس المتصلة بـ v_1 أكبر منها في G وهذا يناقض خاصة

وبالتالي فإن v_1 يجب أن يتصل بالرؤوس ذات الدرجات $d_2, d_3, \ldots, d_{d_1+1}$ إذا البيان $G-v_1$ له متتالية الدرجات S_1، وبالتالي فإن S_1 بيانية. □ .G

سنبين الآن كيف يمكن استخدام المبرهنة2.1 لتحديد فيما إذا كانت متتالية من الأعداد الطبيعية بيانية أم لا.

- لتكن لدينا متتالية غير متزايدة من $p\geq1$ عددا طبيعيا. إذا كانت هذه المتتالية تحوي حدودا أكبر من P-1 فهي ليست بيانية، وإذا كانت هذه المتتالية لا تحتوي حدودا أكبر من P-1 عندها نطبق الخطوات الثلاث التالية على الترتيب لتحديد فيما إذا كانت المتتالية المعطاة بيانية.

1. إذا كانت جميع الأعداد في المتتالية أصفارا، عندئذ تكون المتتالية بيانية. أما إذا كانت المتتالية تحتوي عددا صحيحا سالبا فهي ليست بيانية. وإلا ننتقل إلى الخطوة الثانية.
2. أعد ترتيب الأعداد في المتتالية الحالية إذا كان ذلك ضروريا بحيث تتشكل لدينا متتالية غير متزايدة.
3. احذف العدد الأول وليكن n من المتتالية،ثم قم بإنقاص الـ n عددا التالية بمقدار واحد ثم انتقل إلى الخطوة الأولى.

هذا الإجراء بمثابة خوارزمية والتي سوف نتعرف عليها في نهاية هذا الفصل بالتفصيل.

مثال:

لنأخذ متتالية الدرجات التالية: S: 5, 5, 4, 4, 3, 3, 3, 1, 0, 0

هذه متتالية من عشرة أعداد طبيعية ولا يتجاوز أي حد فيها 6. يمكننا استخدام الإجراء السابق لتحديد فيما إذا كانت هذه المتتالية بيانية.

نبدأ بالخطوة 3 فنحصل على: S`1: 4, 3, 3, 2, 2, 3, 1, 0, 0

نلاحظ أن الحد الأول من المتتالية الأصلية S كان 5، وللحصول على $S`_1$ قمنا بإنقاص 1 من كل حد من الحدود الخمسة التالية للحد الأول من المتتالية الأصلية. وبإعادة ترتيب المتتالية نحصل على:

S_1: 4, 3, 3, 3, 2, 2, 1, 0, 0

بتطبيق الخطوات الثلاثة من الإجراء السابق نحصل على:

$S`_2$: 2, 2, 2, 1, 2, 1, 0, 0
S_2 : 2, 2, 2, 2, 1, 1, 0, 0
$S`_3$: 1, 1, 2, 1, 1, 0, 0
S_3 : 2, 1, 1, 1, 1, 0, 0
$S`_4$: 0, 0, 1, 1, 0, 0
S_4: 1, 1, 0, 0, 0, 0
$S_5 = S`_5$:0, 0, 0, 0, 0

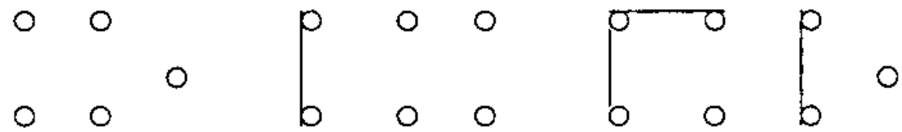
بما أن S_5 بيانية كما هو واضح ينتج أن S_4 بيانية حسب المبرهنة2.1. وباستخدام المبرهنة 2.1 مرات أخرى نستنتج أن S_1 بيانية وبالتالي S بيانية.

إذا لاحظنا أن هناك متتالية تسبق S_5 بيانية عندها نستنتج أن S بيانية وفق المبرهنة2.1.

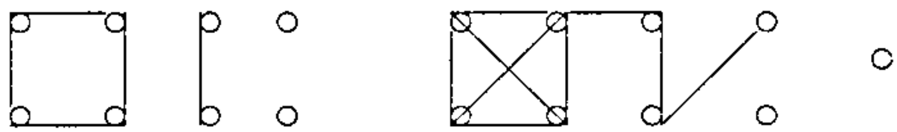
مثلا نلاحظ أن S_4 بيانية لأنها متتالية درجات البيان G_4 المبين في الشكل(15.1). لإنشاء بيان متتالية درجاته S_3 نبدأ بشكل معاكس من $S`_4$ إلى S_3 ونضيف رأسا إلى G_4 ونصله إلى رأسين درجة كل منهما صفر لنحصل بيان G_3 له متتالية درجات S_3.

نكرر نفس العمل لرسم البيانات من G_3 إلىG_1 وذلك بالاعتماد على متتاليات الدرجات السابقة لنحصل على G.

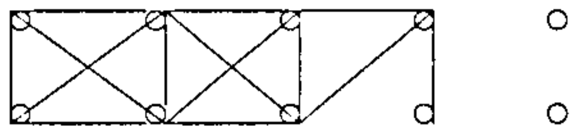
ويوضح الشكل(15.1) ذلك.



G_5 G_4 G_3



G_2 G_1



G

الشكل(15.1)

إنشاء بيان G وفق متتالية درجات معطاة.

مثال:

نأخذ المتتالية التالية: S: 7, 6, 2, 2, 2,1, 0, 0

بتطبيق المبرهنة2.1 نلاحظ أن : S'1: 5, 1, 1, 1, 0, -1, -1، بما أن S'1 غير بيانية بالتالي S غير بيانية.

لقد وجهنا اهتمامنا إلى درجات الرؤوس في البيان وكذلك إلى تكرار هذه الدرجات، الآن سنهمل هذا الأخير ونعرف مجموعة درجات بيان G بأنها مجموعة درجات رؤوس البيان G،ونرمز لها بـــ D(G). مثـــلا للبيـــان G في الشـــكل (14.1) مجموعة الدرجات{ 0, 1, 2, 3, 4 } = D(G). وإذا كانت مجموعة درجات بيان مؤلفة من عنصر واحـــد ولتكن{ r } = D(G) عندئذ يكون البيان G منتظما من الدرجة r.

رأينا أنه ليست كل متتالية أعداد طبيعية بيانية.ولكن بين العلماء Kapoor, Polimeni, and Wall أن كل مجموعـــة منتهية من الأعداد الطبيعية هي مجموعة درجات لبيان ما.

3.1 البيانات المترابطة connected graphs [1][2]

تعد خاصة الترابط من الخواص الهامة في البيان ولشرح هذه الخاصة نورد التعاريف التالية:

✧ تعاريف

ـــ الطريق walk في بيان G: هو متتالية متعاقبة من الرؤوس والأضلاع.

$$W: v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, v_{n-1}, e_n, v_n$$

وتكون بدايته ونهايته رأسا حيث أن $e_i = v_{i-1}v_i$ من أجل $i = 1, 2, \ldots\ldots, n$ وبما أن الطريق W يبدأ بـــ v_0 وينتهي بـــ v_n فإننا نرمز له بـــ $v_0 - v_n$.

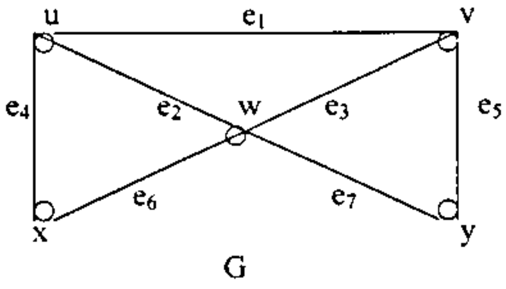
يكون الطريق W ذا طول n إذا كان يمر بـــ n ضلع (ليس من الضروري أن تكون مختلفة).

ـــ الطريق التافه : هو طريق طوله يساوي صفرا.

لدينا البيان G في الشكل(16.1) فيه:

$$u, e_1, v, e_3, w, e_6, x, e_4, u, e_1, v, e_5, y$$

إن طول هذا الطريق 6. وبما أن الرؤوس التي تظهر فيه كافية لتحديد الأضلاع فيمكن حذفها لذلك يمكن التعبير عن الطريق السابق بالشكل التالي: u, v, w, x, u, v, y.



الشكل(16.1)

الطرق في البيانات

سنتعرف على بعض الأنواع الخاصة من الطرق والتي نصادفها في نظرية البيان.

ـــ الطريق البسيط trail: هو طريق لا يتكرر فيه ضلع.

ـــ المسار path: هو طريق لا يتكرر فيه رأس. لذلك المسار هو طريق بسيط، لكن ليس كل طريق بسيط مسارا.

نلاحظ في البيان G المبين بالشكل(16.1) أن الطريق x, w, v, u, w, y هو طريق بسيط ولكنه ليس مسارا، بينما الطريق u,x,w,v,y هو مسار.

ـــ الحلقة cycle:هي طريق $v_0, v_1, ..., v_n$ فيه $n\geq 3$ و $v_0= v_n$ والرؤوس $v_1, v_2, ..., v_n$ مختلفة.

ونقول إن الطريق u - v مغلق closed إذا كان u=v ،وأنه مفتوح open إذا كان $u \neq v$. لذلك الحلقة هي طريق مغلق، بينما المسار غير التافه هو طريق مفتوح.

ـــ الدارة circuit: هي طريق بسيط مغلق غير تافه. بالتالي كل حلقة هي دارة ولكن الدارة ليست بالضرورة حلقة.

لنعد إلى البيان في الشكل(16.1)، نلاحظ أن u,w,y,v,u حلقة طولها 4، بينما u,x,w,v,y,w,u دارة وليس حلقة.

ـــ الرأسان المترابطان: نقول أن v, u مترابطين connected إذا كان البيان G يحوي مسار $u - v$.

ـــ البيان المترابط: نقول عن البيان G أنه مترابط إذا كان u مرتبطا بـــ v وذلك من أجل أي زوج uو v من رؤوسه.

والبيان الذي لا يحقق هذه الخاصة هو بيان غير مترابط disconnected لذلك فإن قولنا أن G غير مترابط هذا يعني أنه يوجد رأسان u و v لا يربط بينهما أي مسار.

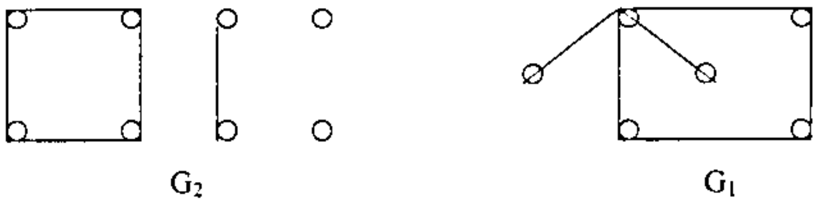
ـــ المركبة component: هي أكبر بيان جزئي مترابط H من البيان G.

إن علاقة الترابط هي علاقة تكافؤ على مجموعة رؤوس بيان G(V,E) وبالتالي فإنها تعطينا تجزئة $V_1, V_2,...,V_k$ للمجموعة V. إن البيانات الجزئية $G\langle V_i \rangle$ حيث أن i=1,..,k هي مركبات G. ونرمز لعدد مركبات بيان بـــ K(G).

نتيجة 4.1

يكون البيان G مترابطا إذا وفقط إذا كان K(G)=1.

نلاحظ في الشكل(17.1) أن البيان G_1 مترابط لأن $K(G_1)=1$ ، بينما البيان G_2 ليس مترابطا لأن $K(G_2) = 4$.



الشكل(17.1)

البيانات المترابطة وغير المترابطة.

4.1 الرؤوس المفصلية cut-vertices ومجموعات التمفصل articulation والجسور bridges [1]

هناك أنواع محددة من الرؤوس والأضلاع والبيانات الجزئية في البيانات المترابطة التي سنعرضها في هذه الفقرة.

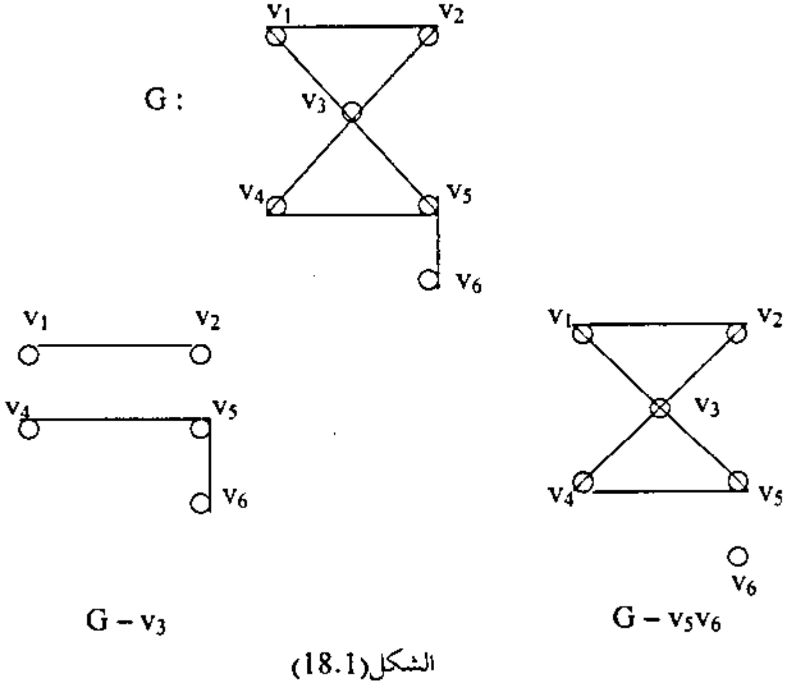
ليكن $G(V,E)$ بيانا نقول عن مجموعة $A \subset V$ غير خالية أنها مجموعة تمفصل cut-set إذا كان $K(G - A)>K(G)$.

في الحالة الخاصة التي تكون فيها A مؤلفة من رأس وحيد {v} عندها يدعى الرأس v رأسا مفصليا cut-vertex. أي أن v رأس مفصلي في بيان مترابط إذا كان $G - v$ بيانا غير مترابط.

في الشكل(18.1) الرأسان v_3 و v_5 هما الرأسان المفصليان الوحيدان في البيان G.

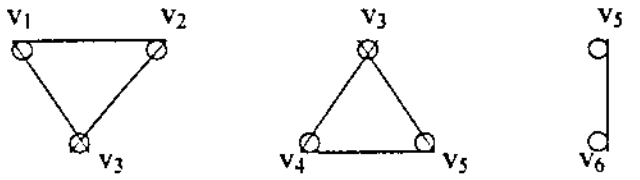
— يدعى الضلع e في بيان G جسرا bridge إذا كان $K(G - e)>K(G)$ وبالتالي يكون الضلع e في بيان مترابط G جسرا إذا كان $G - e$ بيانا غير مترابط. إن الضلع $e = v_5v_6$ من البيان G هو الجسر الوحيد في الشكل (18.1).

ملاحظة: إذا كان v رأسا فاصلا في بيان مترابط G عندئذ يحوي $G - v$ مركبتين أو أكثر. بينما إذا كان e جسرا في G عندها يحوي $G - e$ مركبتين بالضبط.



الشكل(18.1)

الرؤوس المفصلية والجسور.



الشكل(19.1)

كتل البيان G

للبيان G المبين في الشكل(18.1) ثلاث كتل هي: { v_1, v_2, v_3 } و { v_3, v_4, v_5 } و { v_5, v_6 } موضحة في الشكل(19.1). لاحظ أن كل كتلتين تشتركان برأس مفصلية واحدة في G.

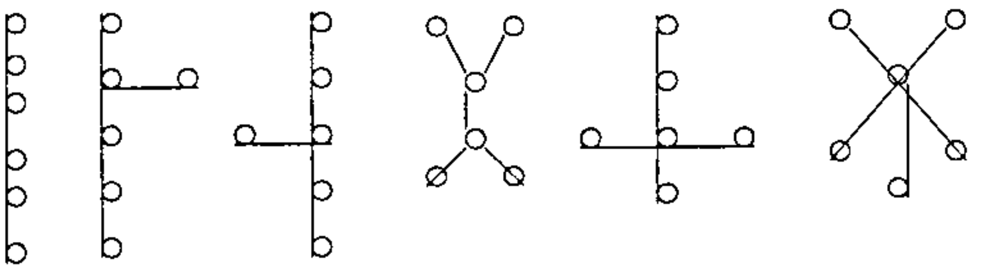
5.1 الأشجار Trees [1][2]

الأشجار هي أبسط البيانات المترابطة.وتستخدم في تطبيقات هامة منها البحث searching والتصنيف sorting.

✧ تعريف

الشجرة tree: هي بيان مترابط لا يحوي حلقات. لذلك فكل ضلع في الشجرة هو جسر. هناك شجرة وحيدة من المرتبة 1 فقط وواحدة من المرتبة 2 وأخرى من المرتبة 3 ولكن هناك شجرتان من المرتبة 4.

يوضح الشكل(20.1) الأشجار الستة(غير المتشاكلة) وهي من المرتبة 6.



الشكل(20.1)

الأشجار من المرتبة السادسة.

✧ تعريف

الغابة forest: هي بيان(مترابط أو غير مترابط) لا يحوي حلقات. لذلك فإن كل مركبة من الغابة هي شجرة.

☜ مبرهنة 4.1 [1][2]

يكون للشجرة من المرتبة p القياس p-1.

الإثبات

سنثبت المطلوب بالاستقراء الرياضي على p. بما أن K_1 هي الشجرة الوحيدة من المرتبة 1 وقياسها 0 فإن الفرضية محققة من أجل p= 1.

ليكن $k \geq 2$ عددا صحيحا ولنفرض أن الفرضية محققة من أجل جميع الأشجار ذات المرتبة أصغر من k. لتكن T شجرة من المرتبة $p = k$ والقياس q وليكن e ضلعا منها.

سبق ولاحظنا أن e جسر في T لذلك فإن T-e غابة(فيها مركبتين حتما). لنرمز لهما بالرمز T_1 وT_2 حيث $T_i\ (i=1,2)$ شجرة من المرتبة p_i والقياس q_i.

من فرضية الاستقراء نعلم أن: $q_i = p_i - 1\ (i=1,2)$ ولكن $p = p_1 + p_2$ و $q = q_1 + q_2 + 1$

وبالتالي:

$$q = (p_1-1) + (p_2-1) + 1 = p_1 + p_2 - 1 = p - 1$$

وهذا يعني أن الفرضية محققة من أجل p أي أن قياس الشجرة هو أقل من مرتبتها بواحد. □

نتيجة 5.1 [1]

ليكن G بيانا من المرتبة p عندئذ تكون العلاقات التالية متكافئة:

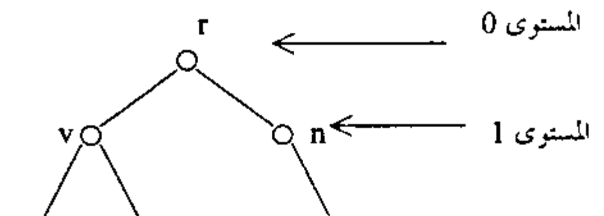
1. G هو شجرة.
2. يكون G مترابطا قياسه p-1.
3. يكون لـ G القياس p-1 ولا يحوي حلقات.

✧ تعريف

ـ الشجرة ذات الجذر rooted tree: تدعى الشجرة T شجرة ذات جذر إذا وجد فيها رأس r بحيث أنه من أجل أي رأس u منها يوجد مسار r-u في T.

إذا كانت T شجرة ذات جذر عندئذ ترسم بحيث يكون الجذر r في الأعلى عند المستوى 0. وتوضع الرؤوس المتصلة به في مستوى أدنى هو المستوى 1. وأي رأس يتصل برأس من المستوى 1 يوضع في المستوي 2......وهكذا. بشكل عام يرتبط أي رأس في المستوى $i \succ 0$ برأس واحد هو حتما في المستوى $i-1$. بكلمات أخرى يكون الرأس x في الشجرة ذات الجذر r واقعا في المستوى i إذا وفقط إذا كان طول المسار r-x يساوي i في T.

لتكن T شجرة ذات جذر. إذا كان v رأسا منها يتصل بـ u، و u يقع في مستو أدنى من v عندها يدعى u رأس ابن child لـ v، ويدعى الرأس v أب parent لـ u، ويوضح الشكل(21.1).



الشكل(21.1)

شجرة جذرية

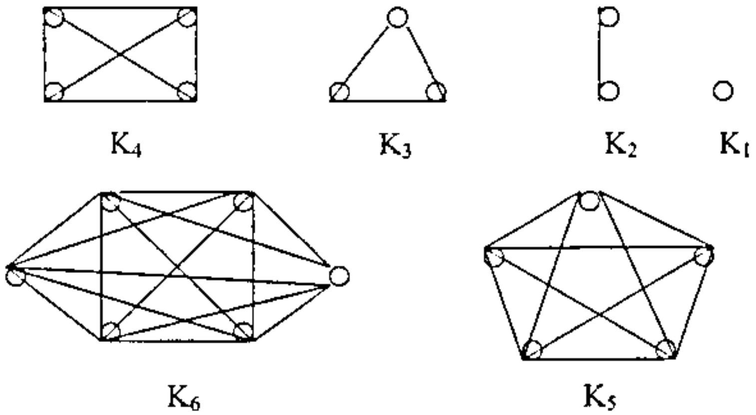
6.1 بيانات خاصة [1][2]

تعطى أنواع محددة من البيانات أسماء خاصة لذلك سنبدأ بدراسة تلك البيانات التي تحتوي كل الأضلاع الممكنة.

✧ تعريف

البيان التام complete graph: هو بيان من المرتبة p يكون فيه كل رأسين مختلفين متصلان ويرمز له

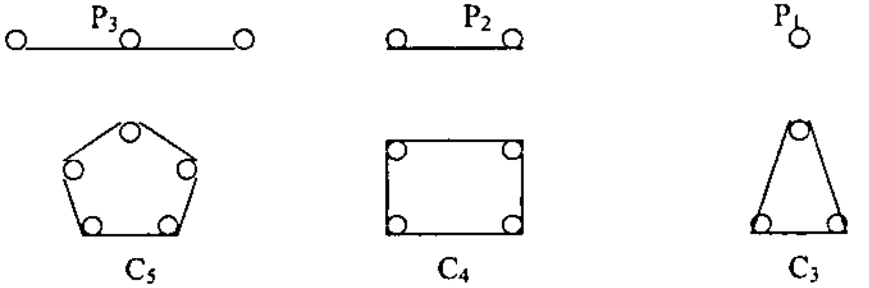
بـــالرمز K_p. وبالتـــالي البيـــان التـــام مـــن المرتبـــة p هـــو بيـــان منتظـــم مـــن الدرجـــة (P-1) والقيـــاس $q=\binom{p}{2}=p(p-1)/2$.يبـــين الشـــكل(22.1) البيانـــــات K_p $(1\le P\le 6)$.



الشكل(22.1)

البيانات التامة

البيان من المرتبة $n \ge 1$ والذي هو بحد ذاته مسار يدعى مسارا من المرتبـــة n ويرمـــز لـــه بـــالرمز P_n.
أما البيان من المرتبة $n \ge 3$ والذي هو بحد ذاته حلقة فيدعى حلقـــة طولهـــا n ويرمـــز لـــه C_n. ويكـــون طـــول المسار فرديا إذا كانت مرتبته زوجية وبالعكس يكون طوله زوجيا إذا كانت مرتبتـــه فرديـــة، أمـــا الحلقـــة فـــهي فردية أو زوجية وفقا لمرتبتها. ويبين الشكل(23.1) ثلاثة مســـارات وثـــلاث حلقـــات.



الشكل(23.1)

المسارات والحلقات

✧ تعريف

البيان الثنائي bipartite: هو بيان G(V,E) يمكن تجزئة مجموعة رؤوسه إلى مجموعتين جزئيتين (غير خاليتين) V_1وV_2 بحيث أن كل ضلع من G يصل رأسا من V_1 ورأسا من V_2 (لا يتم الاتصال بين رؤوس المجموعة الواحدة).
إن البيان في الشكل(24.1) هو بيان ثنائي لأننا نستطيع تجزئةV إلى مجموعتين$V_1=\{v_1, v_6\}$و$V_2=\{v_2, v_3, v_4, v_5\}$ وكل ضلع من G يصل بين رأسين منهما. وقد أعدنا رسم البيان G لنبين أنه ثنائي.